Opakování - Proudění reálné kapaliny

• rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření

• tečné napětí: $\tau = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (Newtonovské kapaliny)

• dynamická viskozita: $\eta = Ae^{B/T}$

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{2R}$$

• dynamická viskozita při 20°C

• voda: $\eta = 1\times 10^{-3}\ \mathrm{Pas}$

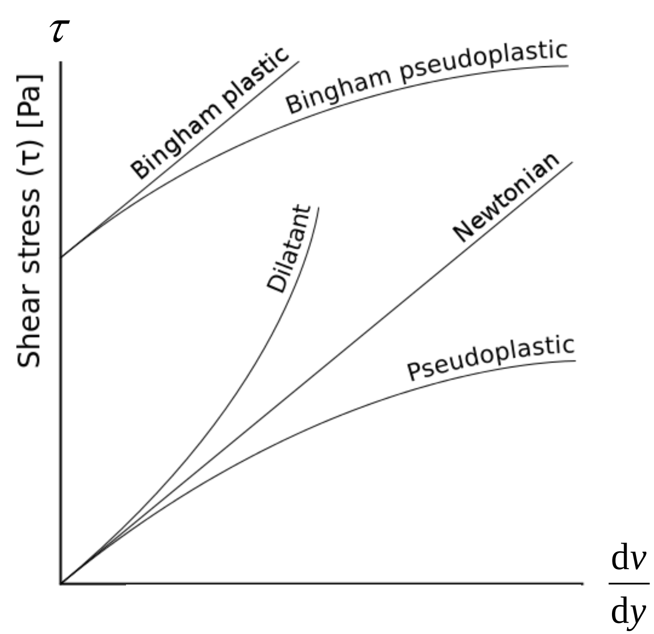
• etanol: $\eta = 1.2\times 10^{-3}\ \mathrm{Pas}$

• glycerín: $\eta = 1.48\ \mathrm{Pas}$

• med: $\eta = 2 - 10\ \mathrm{Pas}$

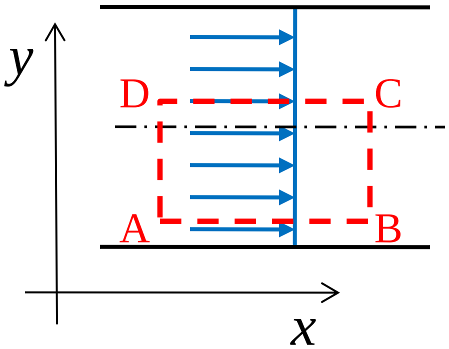
• nenewtonovské kapaliny

- dilatantní: η narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)
- pseudoplastické: η klesá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (krev, barva)
- Binghamské tekutiny: potřebují určitou prahovou hodnotu smykového napětí aby začaly téci (jíl, zubní pasta, majonéza)



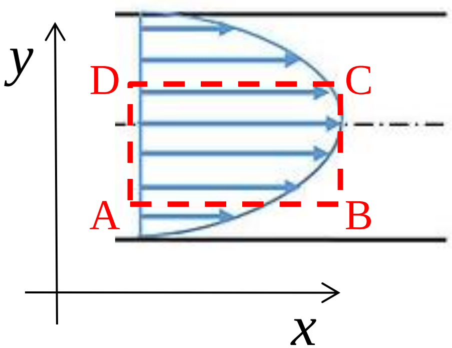
Proudění reálné kapaliny

- proudění ideální kapaliny



$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

- **laminární** proudění reálné kapaliny

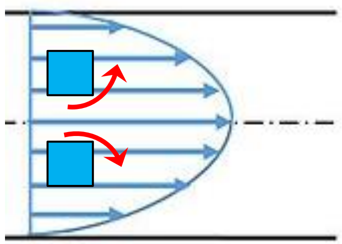


$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

- cirkulace vektoru rychlosti

$$\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \underbrace{\int_B^C \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{0} + \int_C^D \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \underbrace{\int_D^A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}}_{0}$$

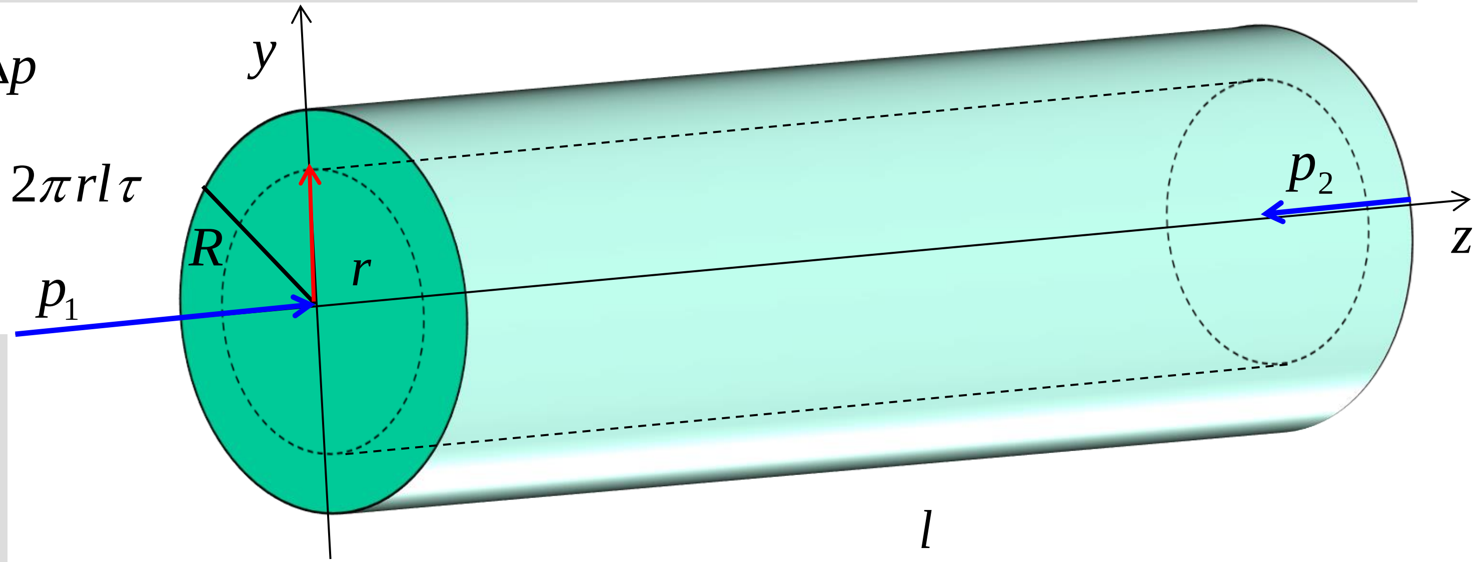
- Je-li cirkulace vektoru rychlosti nenulová, vytvářejí se v proudící kapalině **víry**. Spodní(horní) část elementu kapaliny se pohybuje rychleji.



- Podle intenzity vytváření vírů, můžeme proudění rozdělit na **laminární** a **turbulentní**. Při laminárním prodění se díky malé rychlosti víry znatelně nerozvinou a kapalina se nepromíchává.

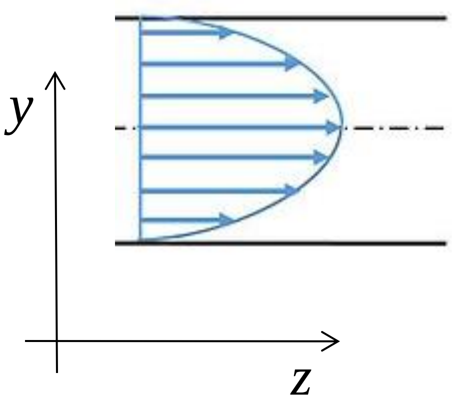
Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi r^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi r l \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4 l \eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



- ustálené laminární proudění: $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$

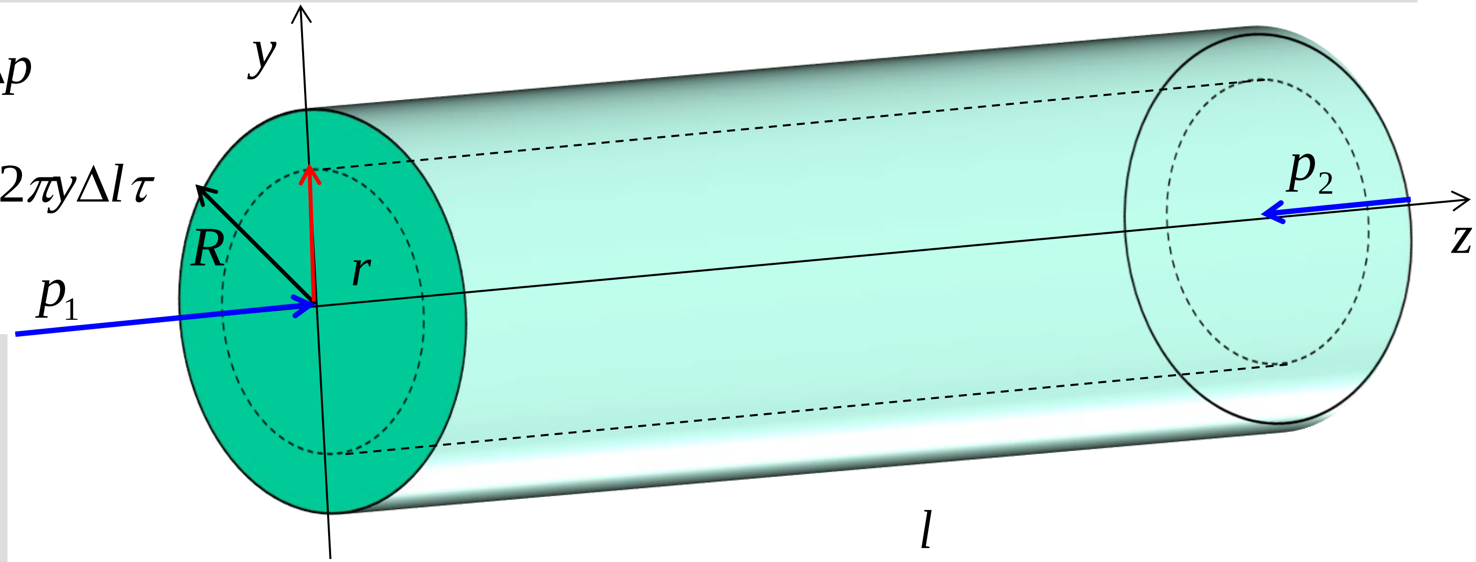
$$\tau = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2 l \eta} r\,\mathrm{d}r \Rightarrow \; v = -\frac{\Delta p}{4 l \eta} r^2 + C$$

$$v(R) = 0 \Rightarrow C = \frac{\Delta p}{4 l \eta} R^2$$

Laminární proudění reálné kapaliny

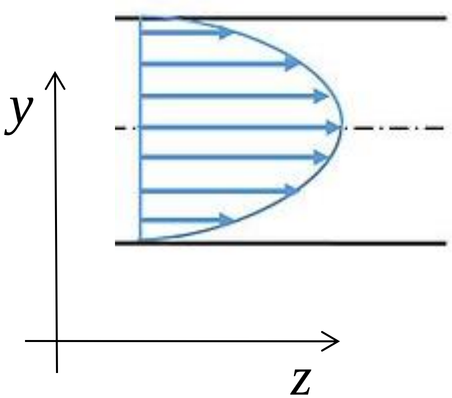
• tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$

• síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



• Objemový průtok potrubím Q

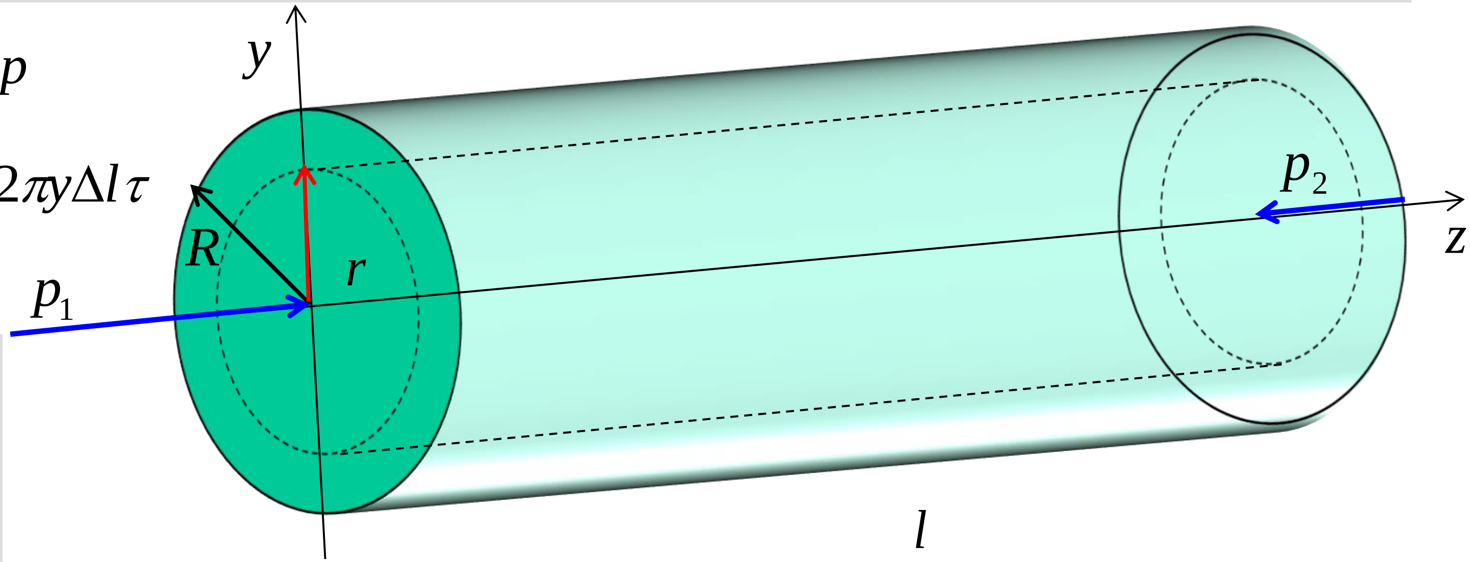
$$\mathrm{d}Q = v\,\mathrm{d}S \Rightarrow Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\Delta p}{4l\eta} 2\pi \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

• **Hagen-Poiseuillův zákon:** $Q = \frac{\pi \Delta p}{8 l \eta} R^4$

• střední rychlost proudění $\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2}$ - rychlost jakou by kapalina musela proudit v celém potrubí, aby se dosáhlo stejného Q

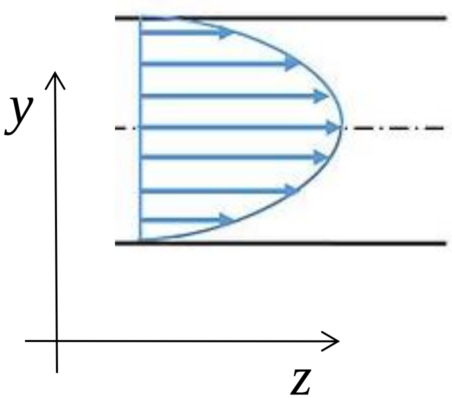
Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4l\eta}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



- Zda v trubici nastane laminární nebo turbulentní proudění lze stanovit podle bezrozměrného **Reynoldsova čísla**:

$$Re = \frac{\rho R \bar{v}}{\eta}$$

$$je - li\ Re < Re_K \Rightarrow Laminární\ \ proud.$$

$$je - li\ Re > Re_K \Rightarrow Turbulentní\ \ proud.$$

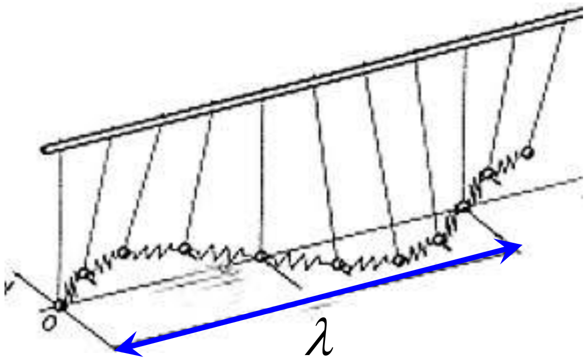
Vlnění – mechanické vlnění

• **Vlnění -** šíření vzruchu nebo oscilací

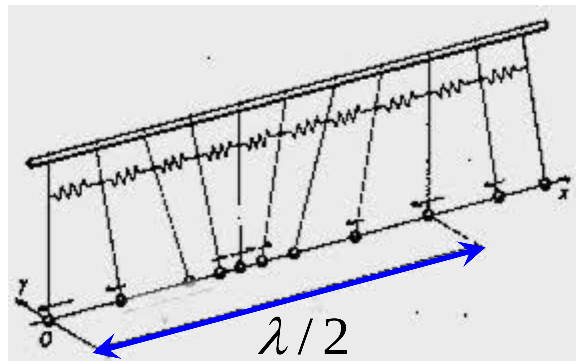
• Vlnění můžeme rozdělit na **mechanické**, jehož typickým příkladem je zvuk, a **elektromagnetické**, které vzniká při zrychleném pohybu nabitých částic nebo při změnách elektronové struktury látek.

• Šíření mechanického vlnění je vázáno na hmotné prostředí(kontinuum), zatímco elektromagnetické vlnění se může šířit i vakuem.

• příčné vlnění



• podélné vlnění



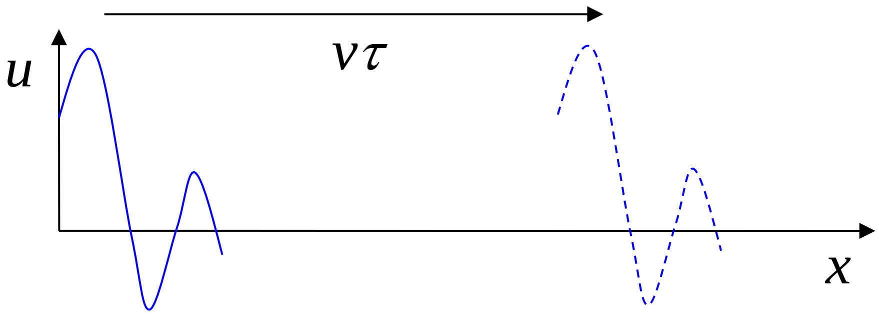
• Mechanické vlnění šířící se trojrozměrným kontinuem můžeme rozdělit podle směru, ve kterém kmitají částice kontinua vzhledem ke směru šíření rozruchu, na **příčné (transverzální)** a **podélné (longitudinální)**.

• **Šíření příčného vlnění** je omezeno na pevné látky, protože vyžaduje přítomnost tečných napětí. Ta se v kapalinách a plynech nemohou trvale udržet, proto se v nich příčné vlnění rychle utlumí.

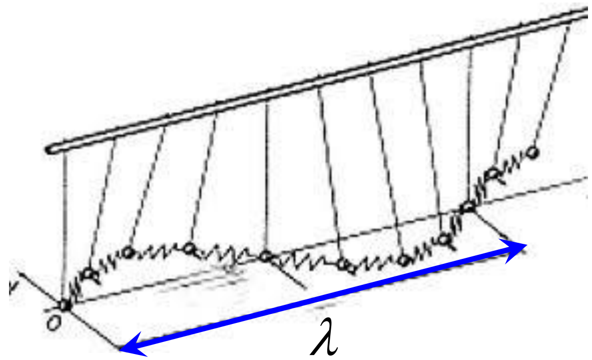
• **Podélné vlnění** je podmíněno přítomností normálových napětí a může se šířit všemi druhy prostředí.

Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

• vlna s výchylkou: $u(x,t)$



• příčné vlnění

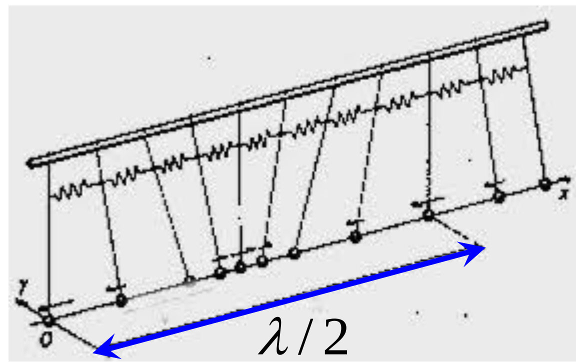


• Rychlost, s jakou se **rozruch** šíří prostředím, označujeme jako rychlost šíření vlnění neboli **fázovou rychlost *v*.**

• Pokud zdroj vlnění (kmitající částice kontinua) koná harmonický pohyb, označíme vzniklé vlnění jako **harmonické vlnění**. Frekvence harmonického kmitu bude i frekvencí harmonického vlnění. Zdroj v počátku bude konat harmonický pohyb o výchylce:

$$u(0,t) = A\cos(\omega t)$$

• podélné vlnění



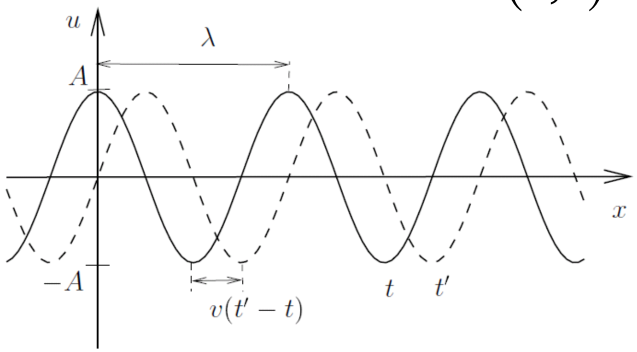
• Rozruch se bude šířit podél osy *x* fázovou rychlostí *v* tak, že do nějakého bodu o souřadnici *x* dorazí za čas $\tau = x/v$, výchylka v bodě *x* bude tedy stejná jako výchylka zdroje v čase: $t - \tau = t - x/v$:

$$u(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

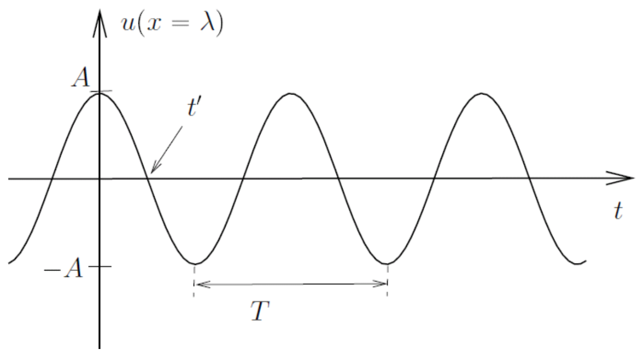
Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

- **Vlnová funkce:**

$$u(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$



(a)



- Minimální vzdálenost mezi dvěma body, které při šíření vlnění kmitají ve stejné fázi označujeme jako **vlnovou délku** λ.

$$u(x+\lambda,t) = u(x,t)$$

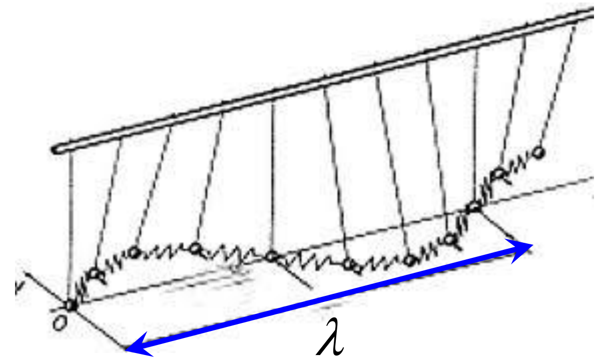
- **Perioda** T značí nejkratší dobu opakování stejné výchylky v daném bodě x.

$$u(x,t+T) = u(x,t)$$

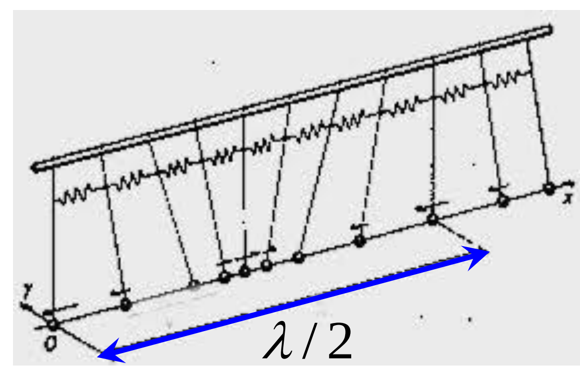
$$A\cos\omega\left(t + T - \frac{x}{v}\right) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x-\lambda}{v}\right) = A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \Rightarrow \lambda = vT$$

- příčné vlnění

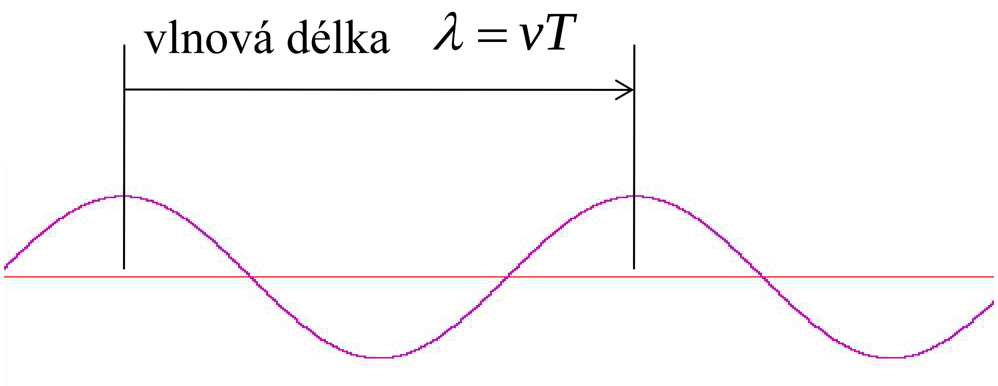


- podélné vlnění



Souvislost frekvence a vlnové délky

• vlna: $\xi(x,t) = f(x - vt)$



$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

perioda kmitů T vlnová délka λ

frekvence $f = \dfrac{1}{T}$ vlnočet $\dfrac{1}{\lambda}$

úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$ úhlový vlnočet $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (velikost vlnového vektoru)

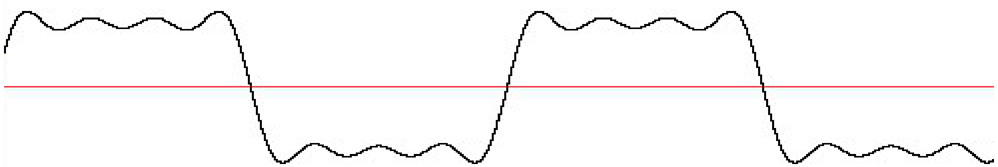
Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

• Zavedeme-li **vlnové číslo(vlnočet)** *k* vztahem:

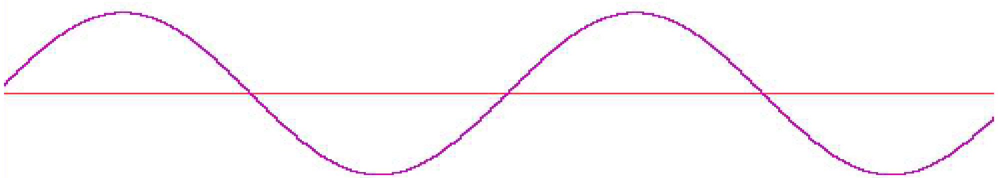
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

můžeme vlnovou funkci přepsat do tvaru:

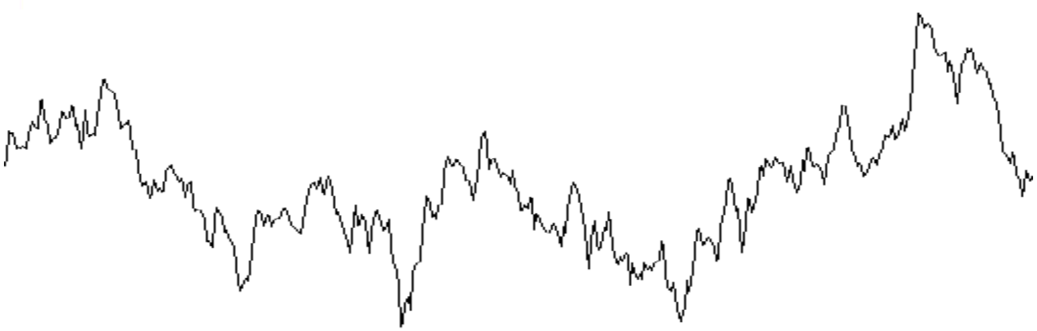
$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \longrightarrow Ae^{i(kx-\omega t)}$$



periodické vlnění



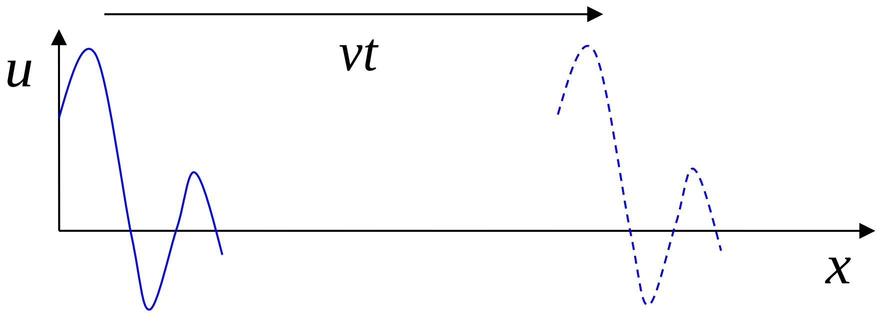
periodické harmonické vlnění



neperiodické vlnění

Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

• vlna s výchylkou: $u(x,t) = f(x \pm vt)$



• V homogenním prostředí je rychlost v konstantou nezávislou na x a t, potom pro druhé parciální derivace složené funkce podle souřadnice a času platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x - vt) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt)$$

• V jednorozměrném případě dostáváme tedy **vlnovou rovnici** ve tvaru: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

• Princip superpozice: je-li u_1 a u_2 řešení je $u_1 + u_2$ také řešení

• Odvození **vlnové rovnice** pro trojrozměrný případ je obdobné:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad kde \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vlnění – mechanické vlnění – vlnová rovnice

- **Vlnová rovnice**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \quad tj. \quad \Delta u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- **Vlnová rovnice** ve sférických souřadnicích:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- Zavádí se substituce:

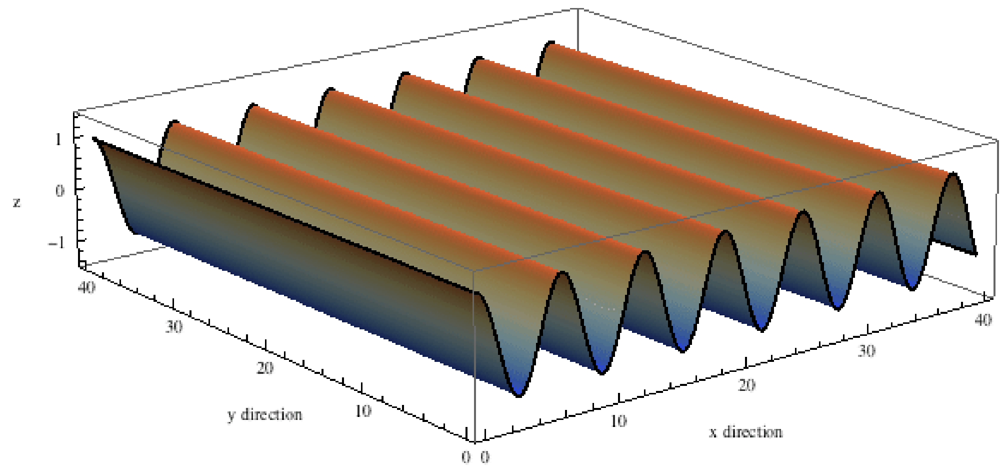
$$u(r,t)=\frac{w(r,t)}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Harmonické vlnění

- harmonická vlna: $u(x,t) = A\cos(kx-\omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]$

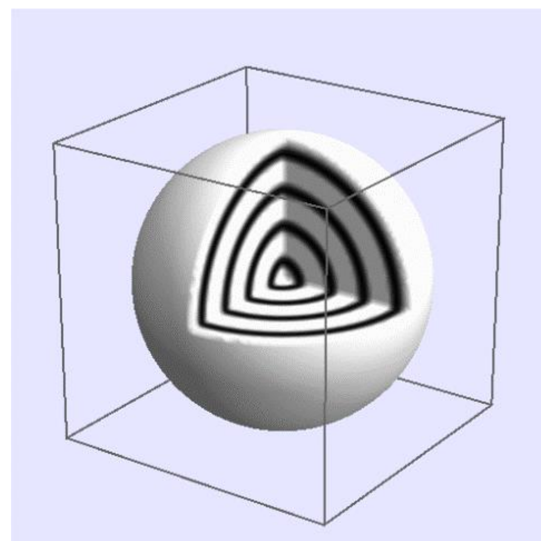
rovinná vlna

$$u(\vec{r},t) = A\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]$$

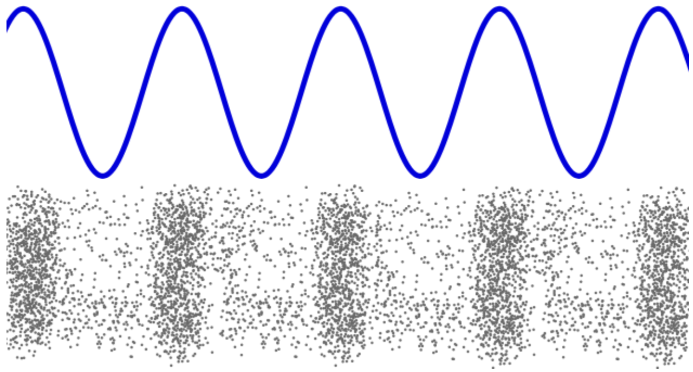


- **sférická vlna**:

$$u(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr-\omega t) = \mathrm{Re}\left[\frac{a}{r}e^{i(kr-\omega t)}\right]$$



Zvuk



- plyn se pohybuje → mění se jeho hustota → změna tlaku
- nerovnoměrné rozložení tlaku → pohyb plynu
- vztah mezi tlakem a hustotou: $p = f(\rho)$
- rovnovážný tlak p_0= 1.0133 bar = 1013.3 hPa, zvuk : $p_e = p - p_0$

dodatečný tlak

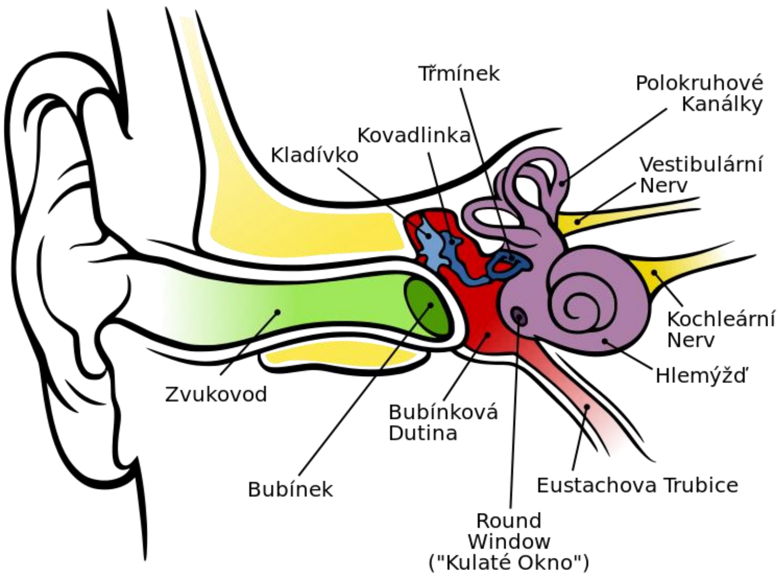
- hladina akustického tlaku $I[\mathrm{dB}] = 20 \log\left(\frac{p_e}{p_{ref}}\right)$

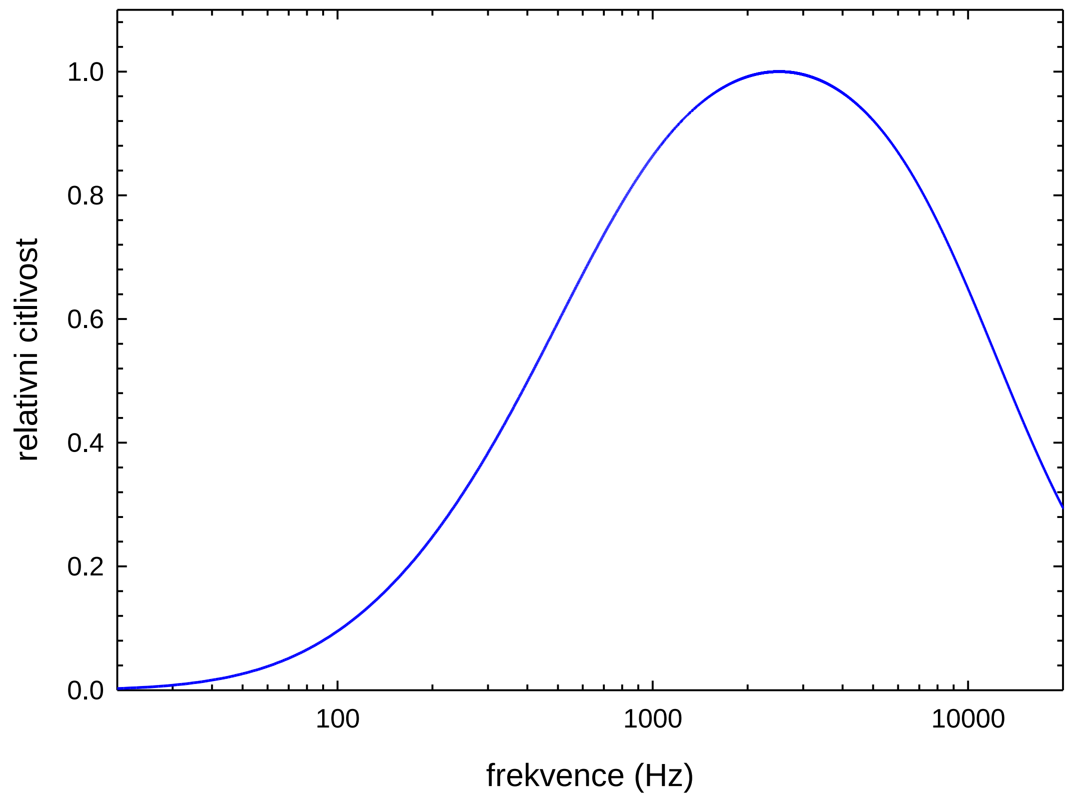
$$p_{ref} = 2\times10^{-10}\ \mathrm{bar} = 2\times10^{-5}\ \mathrm{Pa}$$ (0 dB, práh slyšení)

- hlasitý hovor: 60 dB ($p_e = 2 \times 10^{-2}$ Pa)
- práh bolesti: 120 dB (p_e = 20 Pa)

Rychlost zvuku

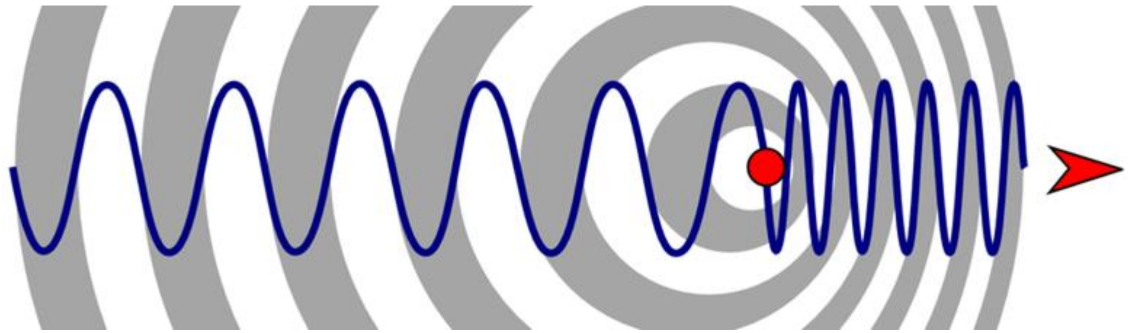
- frekvenční rozsah, který je člověk schopen slyšet: 20 Hz – 20 kHz
- odpovídající rozsah vlnových délek: 18 mm – 18 m
- citlivost lidského ucha na různé frekvence je různá



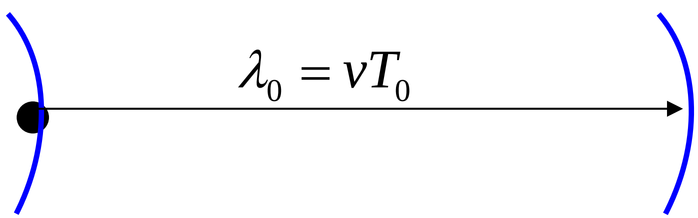


Dopplerův jev

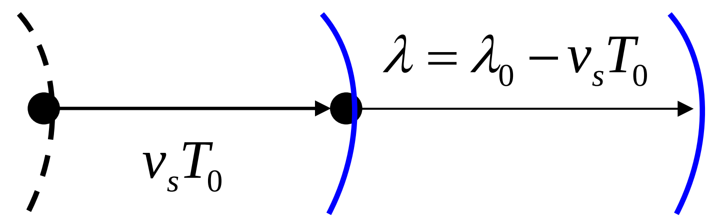
- Christian Doppler, Praha 1842
- pohybující se zdroj vlnění



- **zdroj v klidu**
- perioda vlnění: T_0
- frekvence: $f_0 = 1 / T_0 = v / \lambda_0$



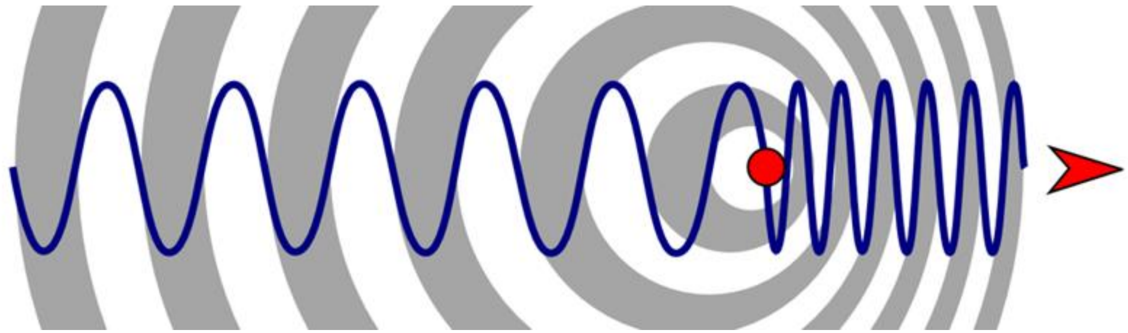
- **zdroj v pohybu**
- perioda vlnění: T
- frekvence: $f = 1 / T = v / \lambda$

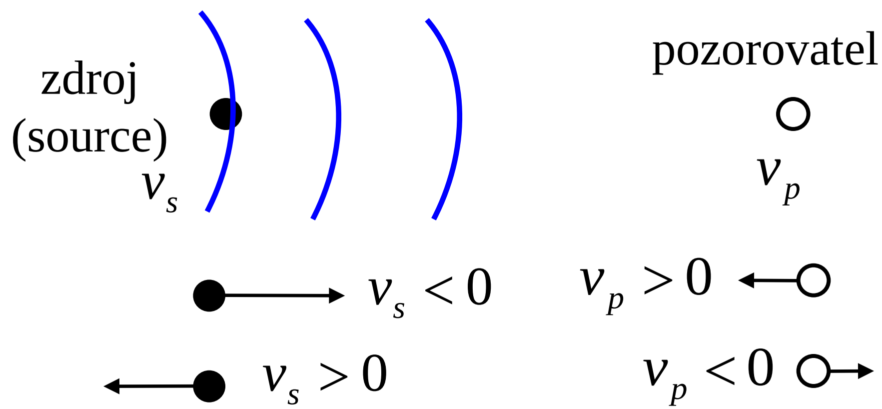


$$f = f_0 \frac{v}{v - v_s}$$

Dopplerův jev

- Christian Doppler, Praha 1842
- zdroj se pohybuje *k nám*:
- frekvence: $$f = f_0 \frac{v}{v - v_s}$$
- vlnová délka: $$\lambda = \lambda_0 - v_s T_0$$
- zdroj se pohybuje *od nás*:
- frekvence: $$f = f_0 \frac{v}{v + v_s}$$
- vlnová délka: $$\lambda = \lambda_0 + v_s T_0$$

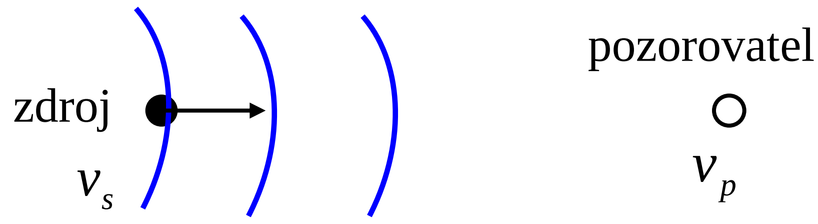




- frekvence vlnění $$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}$$

Dopplerův jev

• frekvence vlnění $$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}$$



• zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí zvuku

$$v_s = -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \infty$$

• zdroj se pohybuje od stojícího pozorovatele rychlostí zvuku

$$v_s = v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \frac{1}{2} f_0$$

• zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí převyšující rychlost zvuku

$$v_s < -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f < 0$$